

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

THÈSE

PRÉSENTÉE

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

POUR L'OBTENTION

du Doctorat de Spécialité (Mathématiques - 3^{ème} Cycle)

par

YVES DANDEÜ

Soutenue le 30 Septembre 1957, devant la Commission d'Examen

Président :	MM. DELSARTE
Examineurs	{ GAUTHIER
	{ LIONS



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547426_0021

SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS MOYENNE-PÉRIODIQUES

THÈSE

PRÉSENTÉE

à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy

POUR L'OBTENTION

du Doctorat de Spécialité (Mathématiques - 3^{ème} Cycle)

par

YVES DANDEÜ

Soutenue le 30 Septembre 1957, devant la Commission d'Examen

Président : MM. DELSARTE
Examineurs { GAUTHIER
LIONS

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

DOYEN : M. URION
ASSESEUR : M. ECHEVIN
DOYENS HONORAIRES : MM. HUSSON, CORNUBERT, DELSARTE

PROFESSEURS HONORAIRES : MM. DARMOIS E, GUTTON, CROZE, DARMOIS G, RAYBAUD
FALLOT, LAFFITE, LERAY, HUSSON, DONZELOT, JOLY, LAPORTE, EICHORN,
CAPELLE, GODEMENT, DUBREIL, SCHWARTZ, DIEUDONNE, de MALLEMANN, LONGCHAMBON

MAITRES DE CONFERENCES HONORAIRES : MM. RAUX, LIENHART.

PROFESSEURS :

MM. CORNUBERT	Chimie org.	MM. ECHEVIN	Botanique
CHEVALLIER	Physique	WAHL	Chimie org. ind.
URION	Chimie biol.	BARRIOL	Chimie théorique
DELSARTE	Analyse sup.	OLMER	Physique appl.
REMY	Zoologie	BIZETTE	Physique
ROUBAULT	Géologie	GUILLEN	Electronique
LETORT	Chimie min.	GIBERT	Génie chimique
GUERIN	Chimie ind.	HERVE	Calcul diff. int.
DODE	Chimie. phys.él.	LEGRAS	Mécanique rat.
VEILLET	Biologie animale	CHAPELLE	Physique
GAUTHIER	Maths. appl.	DAVID	Chimie biol.

MAITRES DE CONFERENCES :

MM. WERNER	Botanique	NICLAUSE	Génie chimique
AUBRY	Chimie	GARNIER	Agronomie
BOLFA	Minéralogie	BRUHAT	Maths. géné.
BESSON	Chimie min.	COPPENS	Radiogéologie
FAIVRE	Physique de l'Etat met.	DUVAL	Chimie
FRUHLING	Radiotechnique	SADRAN	Géochimie
GAYET	Physiologie	CHAPON	Chimie biologique
COMCLET	Mécanique physique	HADNI	Physique
MANGENOT	Phytopathologie	Mm ROIZEN	Physique
LIONS	M.M.P.	HILLY	Géologie de la Lorraine

SECRETAIRE : M. LAPOINTE



Qu'il me soit permis d'exprimer ici
ma profonde gratitude à Monsieur J. DELSARTE pour
les conseils qu'il m'a constamment prodigués et
pour les multiples améliorations dont ce mémoire
lui est redevable.

Je tiens également à remercier Monsieur
J.L. LIONS pour tous les éclaircissements qu'il
a bien voulu me donner, et Monsieur GLAESER pour
l'intérêt qu'il m'accorda en de nombreuses occa-
sions.

Je remercie aussi Monsieur GAUTHIER
qui a bien voulu me faire l'honneur de faire
partie du Jury.

-:-:-:-

Introduction

Etant donnés, un opérateur différentiel D , d'ordre n , linéaire, homogène, à coefficients variables, et, n distributions

$T_1 \dots T_n$, on peut envisager le problème suivant :

Trouver f satisfaisant à :

$$\begin{cases} \text{a)} & Df = \lambda f \\ \text{b)} & \langle T_i; f \rangle = 0 \quad i=1 \dots n \end{cases}$$

Désignons par $h_1(x, \lambda) \dots h_n(x, \lambda)$ un système fondamental de solutions de a). Les n conditions b) conduisent à n équations linéaires et homogènes du type :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\lambda) a_{ij}(\lambda) = 0$$

en posant :

$$a_{ij}(\lambda) = \langle T_j(x) ; h_i(x, \lambda) \rangle$$

Si $A(\lambda)$ désigne le déterminant de ces n équations :

$$A(\lambda) = \boxed{a_{ij}(\lambda)}$$

les conditions b) sont équivalentes à la relation :

$$A(\lambda) = 0$$

A chaque λ_k , zéro de $A(\lambda)$, correspond alors une solution φ_{λ_k} du problème ci-dessus.

Envisageons alors le problème spectral suivant :

Caractériser les fonctions g développables en série de la forme :

$$g = \sum \alpha_k \varphi_{\lambda_k}$$

et, montrer comment on peut calculer les coefficients α_k . Ce dernier point a été entièrement résolu par M. DELSARTE dans une étude non encore publiée.

Le but du présent mémoire est l'étude du problème spectral en question dans le cas où $D = \frac{d^2}{dx^2}$ (Il est expédient dans ce cas de

changer λ en λ^2)

Au cours de ce travail, nous serons amenés successivement, à relier la théorie des fonctions moyenne périodiques au problème spectral envisagé, puis, à donner la méthode de calcul des coefficients, puis enfin à caractériser l'ensemble des fonctions admettant un tel développement spectral, ensemble qui se trouvera être un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions moyenne périodiques par rapport à une certaine distribution T .

Nos notations seront, dans l'ensemble, celles de M. SCHWARTZ (1) (2) à une exception près : la transformée de Fourier d'une distribution S à support compact, sera ici définie par :

$$\langle S; e^{\lambda x} \rangle$$

alors que la notation employée par M. SCHWARTZ était :

$$\langle S; e^{2\pi i \lambda x} \rangle$$

1 - Rattachement de la théorie des fonctions moyenne périodiques à un problème spectral.

Le problème classique de la théorie des fonctions moyenne périodiques d'une variable complexe, peut être présenté ainsi :

On se donne, dans le plan complexe, une distribution T à support compact, et, on envisage les solutions de l'équation différentielle :

$$(1) \quad \frac{df}{dx} - \lambda f = 0$$

solutions satisfaisant à l'équation :

$$(2) \quad \langle T ; f \rangle = 0$$

si l'on désigne par $A(\lambda)$ la fonction analytique entière, transformée de Fourier de T :

$$A(\lambda) = \langle T ; e^{\lambda x} \rangle$$

et, par (Σ) l'ensemble des $\lambda = \lambda_k$ zéros de $A(\lambda)$ dans le plan complexe (zéros que nous supposons simples pour plus de commodité.),

les équations (1) et (2) déterminent une famille d'exponentielles $e^{\lambda_k x}$, $\lambda_k \in (\Sigma)$

En désignant par $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions analytiques entières, muni de la topologie de la convergence compacte, le problème résolu par la théorie des fonctions moyenne périodiques est alors le suivant :

Etant donnée une fonction g arbitraire dans $\mathcal{E}$, peut-on la développer en une série $\sum_{\lambda_k \in (\Sigma)} a_k e^{\lambda_k x}$, et si oui, comment ?

On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction g admette un développement de ce type, développement convergeant dans $\mathcal{E}$, est que g soit moyenne périodique par rapport à T , c'est à dire que g satisfasse à l'équation de convolution :

$$T * g = 0$$

Les a_k sont alors donnés par la formule

$$(3) \quad a_k = \frac{1}{A'(\lambda_k)} \left\langle T ; \int_0^x g(\xi) e^{\lambda_k(x-\xi)} d\xi \right\rangle$$

(voir DELSARTE [1] , SCHWARTZ [1])

Un problème analogue, peut évidemment être posé pour une équation différentielle, à coefficients variables, d'ordre quelconque. M.DELSARTE dans un article non publié à ce jour, a donné une méthode de calcul des coefficients du développement de g , méthode valable, quel que soit l'ordre de l'équation différentielle envisagée.

Dans ce mémoire, nous nous proposons de résoudre complètement la question, dans le cas de l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda^2 f = 0$$

2 - Position du problème.

On se donne deux distributions T_1 et T_2 , toutes deux à support compact, et, on envisage les solutions de l'équation différentielle :

$$(4) \quad \frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda^2 f = 0$$

qui satisfont aux conditions :

$$(5) \quad \begin{cases} \langle T_1 ; f \rangle = 0 & (5_1) \\ \langle T_2 ; f \rangle = 0 & (5_2) \end{cases}$$

Si nous désignons par $A_1(\lambda)$ et $A_2(\lambda)$ les fonctions analytiques entières, transformées de Fourier respectives de T_1 et de T_2 , la solution générale de l'équation (4) étant

$$\alpha e^{\lambda x} + \beta e^{-\lambda x}$$

les conditions (5) s'écrivent :

$$\begin{cases} \alpha A_1(\lambda) + \beta A_1(-\lambda) = 0 \\ \alpha A_2(\lambda) + \beta A_2(-\lambda) = 0 \end{cases}$$

Ce système devant avoir une solution non triviale, son déterminant doit être nul. La fonction $A(\lambda)$ sera donc ici le déterminant :

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1(\lambda) & A_1(-\lambda) \\ A_2(\lambda) & A_2(-\lambda) \end{vmatrix}$$

C'est une fonction analytique entière et, nous désignerons encore par (Σ) l'ensemble de ses zéros (supposés simples) $\lambda = \lambda_k$ dans le plan complexe.

Appelons $\varphi_\lambda(x)$ la solution du problème (4), (5₁). A une constante multiplicative près, $\varphi_\lambda(x)$ est donné par ;

$$\varphi_\lambda(x) = A_1(-\lambda) e^{\lambda x} - A_1(\lambda) e^{-\lambda x}$$

Or

$$\begin{aligned} \langle T_2 ; \varphi_\lambda(x) \rangle &= A_1(-\lambda) A_2(\lambda) - A_1(\lambda) A_2(-\lambda) \\ &= -A(\lambda) \end{aligned}$$

et les solutions du problème (4) et (5) sont donc les fonctions $\varphi_{\lambda_k}(x)$ pour $\lambda_k \in (\Sigma)$.

On peut alors envisager le problème suivant (problème entièrement parallèle à celui que nous avons envisagé précédemment) ; étant donnée une fonction $g \in \mathcal{E}$ peut-on la développer en série de la forme $\sum_{\lambda_k \in (\Sigma)} a_k \varphi_{\lambda_k}(x)$, et si oui, comment ?

Nous allons calculer les coefficients de ce développement en utilisant la méthode de M. DELSARTE et, ultérieurement nous préciserons

les conditions sous lesquelles, le développement ainsi obtenu, représente (dans $\mathcal{E}$) la fonction g qui nous a servi de point de départ.

3 - Calcul des coefficients dans le premier problème spectral.

Tout d'abord, nous allons appliquer la méthode de M. DELSARTE au premier problème que nous avons envisagé, et, nous montrerons qu'elle redonne bien la formule (3) qui détermine les coefficients du développement d'une fonction moyenne périodique.

On suppose donc que pour $g \in \mathcal{E}$ on ait : $g = \sum_{\lambda_k \in (\Sigma)} a_k e^{\lambda_k x}$ et on se propose, g étant donnée, de déterminer les coefficients a_k . Pour cela, nous allons envisager l'équation différentielle avec second membre :

$$(6) \quad \frac{dF}{dx} - \lambda F = g$$

$e^{\lambda x}$ étant solution de l'équation homogène, si F_0 est une solution particulière de l'équation non homogène, la solution générale de (6) est :

$$F = F_0 + K e^{\lambda x}$$

où K est une constante arbitraire.

Parmi toutes ces solutions, nous allons en choisir une qui soit continue en λ et qui soit linéaire et continue en g (la continuité en g signifiant que si g_k tend vers g dans $\mathcal{E}$ alors la solution du problème (6) correspondant à g_k , tend dans $\mathcal{E}$ vers la solution correspondant à g)

La solution ainsi choisie sera désignée par $\mathcal{L}_\lambda[g]$.

Il est important de remarquer que nous ne précisons rien sur la

nature de ce "choix" ; il est arbitraire, une fois les conditions imposées satisfaites ; mais néanmoins, nous verrons que le résultat final est indépendant de la façon dont ce choix a été fait :

Calcul de $\mathcal{L}_\lambda[g]$. La résolution de l'équation (6) par la méthode de variation des constantes donne :

$$F(x) = \int_0^x g(\xi) e^{\lambda(x-\xi)} d\xi + \alpha e^{\lambda x}$$

On peut donc prendre :

$$(7) \quad \mathcal{L}_\lambda[g] = \int_0^x g(\xi) e^{\lambda(x-\xi)} d\xi + \alpha(\lambda, g) e^{\lambda x}$$

expression dans laquelle α est continue en λ , linéaire et continue en g .

Mais on peut calculer $\mathcal{L}_\lambda[g]$ par une autre méthode. On a

$$g = \sum_k a_k e^{\lambda_k x}, \text{ et d'après les propriétés de l'opérateur } \mathcal{L}_\lambda$$

$\mathcal{L}_\lambda[g]$ est entièrement déterminé par la connaissance de $\mathcal{L}_\lambda[e^{\lambda_k x}]$

Calcul de $\mathcal{L}_\lambda[e^{\mu x}]$. L'équation

$$\frac{dF}{dx} - \lambda F = e^{\mu x}$$

admet pour λ différent de μ , la solution particulière

$$\frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda}$$

On peut donc prendre :

$$(8) \quad \mathcal{L}_\lambda[e^{\mu x}] = \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda} + H(\lambda, \mu) e^{\lambda x}$$

ou H est une fonction continue en λ et μ .

Ceci suppose $\mu \neq \lambda$. Que se passe-t-il quand μ tend vers λ ?

D'après l'hypothèse faite sur H , cette expression tend alors vers :

$$(9) \quad \mathcal{L}_\lambda[e^{\lambda x}] = x e^{\lambda x} + H(\lambda, \lambda) e^{\lambda x}$$

Détermination des a_k . $g = \sum a_k e^{\lambda_k x}$, donne alors :

$$\alpha_{\lambda}[g] = \sum a_j \alpha_{\lambda}[e^{\lambda_j x}] = \sum a_j \left[\frac{e^{\lambda_j x} - e^{\lambda x}}{\lambda_j - \lambda} + H(\lambda, \lambda_j) e^{\lambda x} \right]$$

développement où figure un terme irrégulier si $\lambda = \lambda_k \in (\Sigma)$, lequel terme irrégulier s'écrit :

$$x e^{\lambda_k x} + H(\lambda_k, \lambda_k) e^{\lambda_k x}$$

Calculons $\langle T ; \alpha_{\lambda_k}[g] \rangle$. D'après les propriétés de l'opérateur α_{λ} on a :

$$\langle T ; \alpha_{\lambda_k}[g] \rangle = \sum a_j \langle T, \alpha_{\lambda_k}[e^{\lambda_j x}] \rangle$$

Or pour tout $\lambda_j \in (\Sigma)$ on a :

$$\langle T ; e^{\lambda_j x} \rangle = 0$$

et donc :

$$\langle T ; \alpha_{\lambda_k}[g] \rangle = a_k \langle T ; x e^{\lambda_k x} \rangle = a_k \cdot A'(\lambda_k)$$

Mais en utilisant la formule (7) on a aussi :

$$\langle T ; \alpha_{\lambda_k}[g] \rangle = \langle T ; \int_0^x g(\xi) e^{\lambda_k(x-\xi)} d\xi \rangle$$

et donc finalement :

$$a_k = \frac{1}{A'(\lambda_k)} \langle T ; \int_0^x g(\xi) e^{\lambda_k(x-\xi)} d\xi \rangle$$

ce qui n'est rien d'autre que la formule (3)

A partir de maintenant, nous n'allons plus nous occuper que du second problème spectral.

Remarque préliminaire - $A(\lambda)$ est alors une fonction impaire, si elle admet $\lambda = \lambda_k$ pour zéro elle admet donc aussi $\lambda = -\lambda_k$ pour zéro, et, en particulier, $0 \in (\Sigma)$. En outre

$$\varphi_{\lambda}(x) = A_1(-\lambda) e^{\lambda x} - A_1(\lambda) e^{-\lambda x}$$

est une fonction impaire de λ , et, par suite, le développement de g peut être mis sous la forme :

$$g = \sum \alpha_k \varphi_{\lambda_k} x$$

l'ensemble sur lequel s'effectue la sommation étant

$$\lambda_k \in (\Sigma) \text{ avec } \begin{cases} \text{soit } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \\ \text{soit } \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0, \operatorname{Im}(\lambda_k) \geq 0 \end{cases}$$

Il convient de noter que puisque $\varphi_0(x) = 0$, nous n'aurons pas besoin de calculer le coefficient α_0 , ce qui ne pourrait se faire, sans précautions préalables, par la méthode que nous allons indiquer.

Nous ferons la convention suivante : chaque fois que, dans une série, l'ensemble sur lequel s'effectue la sommation n'est pas indiqué c'est que cet ensemble est ;

$$\lambda_k \in (\Sigma) \text{ avec } \begin{cases} \text{soit } \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \\ \text{soit } \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0, \operatorname{Im}(\lambda_k) \geq 0 \end{cases}$$

Cette convention étant faite, nous allons maintenant calculer les α_k par la méthode de M. DELSARTE.

4 - Calcul des coefficients dans le second problème spectral.

Pour cela, envisageons le problème suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 F}{dx^2} - \lambda^2 F = g \\ \langle T_1, F \rangle = 0 \end{cases}$$

$\varphi_\lambda(x)$ étant : solution du problème homogène correspondant, si F_0 est une solution particulière du problème (10), la solution générale de ce problème sera :

$$F = F_0 + K \varphi_\lambda$$

où K est une constante arbitraire.

Parmi l'ensemble des solutions de (10), nous allons en choisir une qui soit continue en λ , et, qui soit linéaire et continue en g . Nous désignerons la solution ainsi choisie par $\alpha_\lambda[g]$. De même que dans le premier problème spectral, ce choix présente une part d'arbitraire et pourtant, nous verrons qu'ici encore, le résultat final est indépendant de la façon dont ce choix a été fait.

Calcul de $\alpha_\lambda[g]$. La résolution de l'équation :

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - \lambda^2 F = g$$

par la méthode de variation des constantes donne :

$$F(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x \operatorname{sh} \lambda(x-\xi) g(\xi) d\xi + \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{-\lambda x}$$

où α et β ne dépendent pas de x . On peut donc prendre

$$(11) \alpha_\lambda[g] = \frac{1}{\lambda} \int_0^x \operatorname{sh} \lambda(x-\xi) g(\xi) d\xi + \alpha(\lambda, g) e^{\lambda x} + \beta(\lambda, g) e^{-\lambda x}$$

(expression dans laquelle α et β sont fonctions continues de λ ,

linéaires et continues de g), ceci sous la condition

$$\langle T_1 ; f \rangle = 0$$

ce qui s'écrit :

$$(12) \frac{1}{\lambda} \langle T_1 ; \int_0^x \operatorname{sh} \lambda(x-\xi) g(\xi) d\xi \rangle + \alpha(\lambda, g) A_1(\lambda) + \beta(\lambda, g) A_1(-\lambda) = 0$$

Mais on sait que, d'après les propriétés de l'opérateur α_λ , $\alpha_\lambda[g]$ est entièrement déterminé par la connaissance de $\alpha_\lambda[\varphi_\mu]$.

Calcul de $\alpha_\lambda[\varphi_\mu]$. L'équation :

$$\frac{d^2 F}{dx^2} - \lambda^2 F = \varphi_\mu$$

admet pour $\mu \neq \lambda$ la solution particulière :

$$\frac{\varphi_\mu(x) - \varphi_\lambda(x)}{\mu^2 - \lambda^2}$$

L'expression :

$$\frac{\varphi_{\mu}(x) - \varphi_{\lambda}(x)}{\mu^2 - \lambda^2} + H(\lambda, \mu) \varphi_{\lambda}(x)$$

où H est une fonction continue en μ et en λ , est encore solution de l'équation ci-dessus. Or :

$$\langle T_1 ; \varphi_{\nu}(x) \rangle = \langle T_1 ; A_1(-\nu) e^{\nu x} - A_1(\nu) e^{-\nu x} \rangle = 0$$

ceci quelque soit ν ; par suite on peut donc prendre :

$$(13) \quad \mathcal{L}_{\lambda}[\varphi_{\mu}] = \frac{\varphi_{\mu}(x) - \varphi_{\lambda}(x)}{\mu^2 - \lambda^2} + H(\lambda, \mu) \varphi_{\lambda}(x)$$

Ceci suppose $\mu \neq \lambda$. Que se passe-t-il quand μ tend vers λ ?

D'après l'hypothèse faite sur H , lorsque μ tend vers λ , l'expression ci-dessus tend vers :

$$(14) \quad \mathcal{L}_{\lambda}[\varphi_{\lambda}] = \frac{1}{2\lambda} \varphi'_{\lambda}(x) + H(\lambda, \lambda) \varphi_{\lambda}(x)$$

(l'accent désignant la dérivée prise par rapport à λ).

Détermination des α_k . $g = \sum \alpha_j \varphi_{\lambda_j}$ implique d'après les propriétés de $\mathcal{L}_{\lambda}$:

$$\mathcal{L}_{\lambda}[g] = \sum \alpha_j \mathcal{L}_{\lambda}[\varphi_{\lambda_j}] = \sum \alpha_j \left[\frac{\varphi_{\lambda_j} - \varphi_{\lambda}}{\lambda_j^2 - \lambda^2} + H(\lambda, \lambda_j) \varphi_{\lambda} \right]$$

développement où figure un terme irrégulier si $\lambda = \lambda_k$, lequel terme irrégulier s'écrit :

$$\frac{1}{2\lambda_k} \varphi'_{\lambda_k}(x) + H(\lambda, \lambda_k) \varphi_{\lambda_k}(x).$$

Or on a :

$$\langle T_2 ; \varphi_{\lambda}(x) \rangle = A_1(-\lambda) A_2(\lambda) - A_1(\lambda) A_2(-\lambda) = -A(\lambda)$$

et donc pour $\lambda = \lambda_j \in (\Sigma)$:

$$\langle T_2, \varphi_{\lambda_j}(x) \rangle = 0.$$

Donc

$$\langle T_2 ; \mathcal{L}_{\lambda_k} [g] \rangle = \frac{\alpha_k}{2\lambda_k} \langle T_2 ; \varphi'_{\lambda_k}(x) \rangle = -\frac{\alpha_k}{2\lambda_k} A'(\lambda_k)$$

Mais $\mathcal{L}_{\lambda_k} [g]$ nous est aussi donné par la formule (11) sous la condition (12) et donc :

$$(15) \quad \langle T_2 ; \mathcal{L}_{\lambda_k} [g] \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \langle T_2 ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k(x-\xi) d\xi \rangle + \dots \\ \dots + \alpha A_2(\lambda_k) + \beta A_2(-\lambda_k) \rangle$$

ceci sous la condition (12) (pour $\lambda = \lambda_k$).

Multiplions (12) par $A_2(\lambda_k)$, (15) par $A_1(\lambda_k)$, retranchons (12) de (15) et utilisons le fait que $\lambda_k \in (\Sigma)$ entraîne $A(\lambda_k) = 0$.

Il vient alors :

$$A_1(\lambda_k) \langle T_2 ; \mathcal{L}_{\lambda_k} [g] \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \langle A_1(\lambda_k) T_2 - A_2(\lambda_k) T_1 ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k(x-\xi) d\xi \rangle$$

et donc finalement on a :

$$(16) \quad \alpha_k = \frac{-2}{A'(\lambda_k) A_1(\lambda_k)} \cdot \dots \\ \cdot \dots \langle A_1(\lambda_k) T_2 - A_2(\lambda_k) T_1 ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k(x-\xi) d\xi \rangle$$

ce qui n'a de sens que si $A_1(\lambda_k) \neq 0$. En réalité, cette condition

n'est qu'apparente : on peut en effet remarquer que le produit

$\alpha_k \varphi_{\lambda_k}$ conserve, lui, toujours un sens.

En effet on a : $\alpha_k \varphi_{\lambda_k} = \dots$

$$\dots = -\frac{2}{A'(\lambda_k)} \langle A_1(-\lambda_k) T_2 - \frac{A_1(-\lambda_k) A_2(\lambda_k)}{A_1(\lambda_k)} T_1 ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k(x-\xi) d\xi \rangle e^{\lambda_k x} + \dots$$

$$\dots + \frac{2}{A'(\lambda_k)} \langle A_1(\lambda_k) T_2 - A_2(\lambda_k) T_1 ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k(x-\xi) d\xi \rangle e^{-\lambda_k x}$$

Or $\lambda_k \in (\Sigma)$ entraîne $A(\lambda_k) = 0$ et donc :

$$A_1(-\lambda_k) A_2(\lambda_k) = A_1(\lambda_k) A_2(-\lambda_k)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \alpha_k \varphi_{\lambda_k} = & - \frac{2}{A'(\lambda_k)} \langle A_1(-\lambda_k) T_2 - A_2(-\lambda_k) T_1 ; \dots \\ & \dots ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k(x-\xi) d\xi \rangle e^{\lambda_k x} + \dots \\ & \dots + \frac{2}{A'(\lambda_k)} \langle A_1(\lambda_k) T_2 - A_2(\lambda_k) T_1 ; \dots \\ & \dots ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh} \lambda_k(x-\xi) d\xi \rangle e^{-\lambda_k x} \end{aligned}$$

ce qui a toujours un sens même si $A_1(\lambda_k) = 0$.

5 - Caractérisation des fonctions g.

Il nous faut maintenant caractériser les fonctions $g \in \mathcal{G}$ qui ont un développement en série de la forme $\sum \alpha_k \varphi_{\lambda_k}(x)$

Nous remarquerons d'abord que

$$A(\lambda) = A_1(\lambda) A_2(-\lambda) - A_2(\lambda) A_1(-\lambda)$$

peut être envisagée comme étant la transformée de Fourier de la distribution à support compact T

$$T = T_1 * \check{T}_2 - T_2 * \check{T}_1$$

(S étant une distribution, $\check{S}$ est la distribution symétrique de S définie par : $\langle \check{S} ; \check{\varphi} \rangle = \langle S ; \varphi \rangle$ (voir SCHWARTZ [2]))

Puisque l'on a :

$$\varphi_{\lambda}(x) = A_1(-\lambda) e^{\lambda x} - A_1(\lambda) e^{-\lambda x}$$

une série du type $\sum \alpha_k \varphi_{\lambda_k}(x)$ peut être mise sous la forme

$\sum_{\lambda_k \in (\Sigma)} \beta_k e^{\lambda_k x}$ et par suite si elle converge dans $\mathcal{E}$, elle représente nécessairement une fonction moyenne périodique par rapport à $T = T_1 * \check{T}_2 - T_2 * \check{T}_1$

On voit donc que l'ensemble des fonctions $g \in \mathcal{E}$, qui admettent un développement $\sum \alpha_k \varphi_{\lambda_k}(x)$ convergent dans $\mathcal{E}$, est un sous espace vectoriel fermé $\mathcal{P}$ de l'espace des fonctions moyenne périodiques par rapport à T .

Nous allons caractériser ce sous espace.

6- Théorème

La condition nécessaire et suffisante pour que g soit dans $\mathcal{P}$ est :

$$(17) \quad \begin{cases} (\check{T}_1 * g) + (T_1 * \check{g}) = 0 \\ (\check{T}_2 * g) + (T_2 * \check{g}) = 0 \end{cases}$$

Condition nécessaire - Soit donc $g \in \mathcal{P}$; alors on a :

$$g = \sum \alpha_k \varphi_{\lambda_k} = \sum \alpha_k \left[A_1(-\lambda_k) e^{\lambda_k x} - A_1(\lambda_k) e^{-\lambda_k x} \right]$$

$$\begin{aligned} a) \quad \check{T}_1 * g &= \sum \alpha_k \check{T}_1 * \varphi_{\lambda_k} \\ &= \sum \alpha_k \langle T_1(\xi) ; A_1(-\lambda_k) e^{\lambda_k(x+\xi)} - A_1(\lambda_k) e^{-\lambda_k(x+\xi)} \rangle \\ &= \sum \alpha_k A_1(\lambda_k) A_1(-\lambda_k) \left[e^{\lambda_k x} - e^{-\lambda_k x} \right] \end{aligned}$$

$$T_1 * \check{g} = (\check{T}_1 * g)^\vee = \sum \alpha_k A_1(\lambda_k) A_1(-\lambda_k) \left[e^{-\lambda_k x} - e^{\lambda_k x} \right]$$

et donc :

$$(\check{T}_1 * g) + (T_1 * \check{g}) = 0$$

$$\begin{aligned} b) \quad \check{T}_2 * g &= \sum \alpha_k \check{T}_2 * \varphi_{\lambda_k} \\ &= \sum \alpha_k \langle T_2(\xi) ; A_1(-\lambda_k) e^{\lambda_k(x+\xi)} - A_1(\lambda_k) e^{-\lambda_k(x+\xi)} \rangle \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= \sum \alpha_k \left\{ A_1(-\lambda_k) A_2(\lambda_k) e^{\lambda_k x} - A_1(\lambda_k) A_2(-\lambda_k) e^{-\lambda_k x} \right\}$$

$$T_2 * \check{g} = (\check{T}_2 * g)^\vee = \sum \alpha_k \left\{ A_1(-\lambda_k) A_2(\lambda_k) e^{-\lambda_k x} - A_1(\lambda_k) A_2(-\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right\}$$

et donc :

$$(\check{T}_2 * g) + (T_2 * \check{g}) = \dots$$

$$= \sum \alpha_k \left\{ A_1(-\lambda_k) A_2(\lambda_k) - A_1(\lambda_k) A_2(-\lambda_k) \right\} \cdot \left\{ e^{\lambda_k x} + e^{-\lambda_k x} \right\}$$

$$= - \sum \alpha_k A(\lambda_k) \left\{ e^{\lambda_k x} + e^{-\lambda_k x} \right\}$$

$$= 0 \quad \text{puisque } A(\lambda_k) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda_k \in (\Sigma)$$

Condition suffisante - La démonstration va se faire en deux temps :

a) Si g satisfait aux conditions (17), g est moyenne périodique par

rapport à $T = T_1 * \check{T}_2 - T_2 * \check{T}_1$

En effet :

$$\check{T}_1 * g + T_1 * \check{g} = 0 \quad \text{implique} \quad T_2 * \check{T}_1 * g + T_2 * T_1 * \check{g} = 0$$

$$\check{T}_2 * g + T_2 * \check{g} = 0 \quad \text{implique} \quad T_1 * \check{T}_2 * g + T_1 * T_2 * \check{g} = 0$$

Par soustraction il vient :

$$(T_1 * \check{T}_2 - T_2 * \check{T}_1) * g = T * g = 0$$

b) Si g est moyenne périodique par rapport à T et si g satisfait à

(17₁), g est dans $\mathcal{P}$

g étant moyenne périodique par rapport à T , on a :

$$g = \sum_{\lambda_k \in (\Sigma)} a_k e^{\lambda_k x}$$

Puisque $\lambda_k \in \Sigma$ implique $(-\lambda_k) \in (\Sigma)$, le développement ci-dessus

peut toujours être mis sous la forme :

$$g = \sum \beta_k e^{\lambda_k x} + \sum \gamma_k e^{-\lambda_k x}$$

avec $\beta_0 = \gamma_0 = \frac{1}{2} a_0$. La condition (17₁) s'écrit alors :

$$\sum \left[\beta_k A_1(\lambda_k) + \gamma_k A_1(-\lambda_k) \right] \left\{ e^{\lambda_k x} + e^{-\lambda_k x} \right\} = 0$$

Mais les exponentielles du spectre d'une fonction moyenne périodique forment un système libre (voir DELSARTE [1], SCHWARTZ [1]), et donc nécessairement on a :

$$\beta_k A_1(\lambda_k) + \gamma_k A_1(-\lambda_k) = 0$$

ceci pour tout $\lambda_k \in (\Sigma)$. Donc

$$\beta_k = u_k A_1(-\lambda_k)$$

$$\gamma_k = -u_k A_1(\lambda_k)$$

$$\begin{aligned} g &= \sum u_k \left\{ A_1(-\lambda_k) e^{\lambda_k x} - A_1(\lambda_k) e^{-\lambda_k x} \right\} \\ &= \sum u_k \psi_{\lambda_k}(x) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de notre théorème.

7 - Identification des coefficients. Une fonction g appartenant à

$\mathcal{D}$ peut donc être développée de deux manières :

- premièrement, elle est moyenne périodique par rapport à T et par suite elle se met sous la forme :

$$\sum_{\lambda_k \in (\Sigma)} a_k e^{\lambda_k x}$$

les a_k étant donnés par la formule (3).

- deuxièmement, elle admet un développement spectral du type :

$$\sum \alpha_k \varphi_{\lambda_k}(x) = \sum \alpha_k \left\{ A_1(-\lambda_k) e^{\lambda_k x} - A_1(\lambda_k) e^{-\lambda_k x} \right\}$$

les α_k étant donnés par la formule (16)

Il est certain que les deux développements sont identiques, puisqu'une fonction moyenne périodique ne peut avoir qu'un seul développement. Cependant les formules donnant les coefficients de $e^{\lambda_k x}$ ne sont pas les mêmes ; il sera donc utile de démontrer leur identité.

Le coefficient de $e^{\lambda_k x}$ dans le développement de g en fonction moyenne périodique est a_k ; dans le développement spectral ce coefficient est $\alpha_k A_1(-\lambda_k)$.

Il nous faut donc montrer que l'on a :

$$a_k = \alpha_k A_1(-\lambda_k)$$

D'après la formule (3) on a :

$$a_k = \frac{1}{\Lambda'(\lambda_k)} \left\langle T_1 * \check{T}_2 - T_2 * \check{T}_1 ; \int_0^x g(\xi) e^{\lambda_k(x-\xi)} d\xi \right\rangle$$

Ainsi que nous l'avons déjà vu, on a :

$$\alpha_k A_1(-\lambda_k) = \dots$$

$$\dots = \frac{2}{\Lambda'(\lambda_k)} \left\langle A_2(-\lambda_k) T_1 - A_1(-\lambda_k) T_2 ; \int_0^x g(\xi) \operatorname{sh}_{\lambda_k}(x-\xi) d\xi \right\rangle$$

ce qui, en utilisant la définition de la transformation de Fourier et la décomposition du sinus hyperbolique, se met sous la forme :

$$(18) \quad \alpha_k A_1(-\lambda_k) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{\Lambda'(\lambda_k)} \langle\langle T_1(\xi) \times T_2(h); \left\{ \int_0^h g(u) e^{\lambda_k(h-u-\xi)} du - \dots \right. \\ \left. \dots - \int_0^\xi g(u) e^{\lambda_k(\xi-h-u)} du - \int_\xi^h g(u) e^{-\lambda_k(\xi+h-u)} du \right\} \rangle\rangle$$

En procédant de même, la formule donnant le coefficient a_k se met sous la forme :

$$(19) \quad a_k = \frac{1}{\Lambda'(\lambda_k)} \langle\langle T_1(\xi) \times T_2(h) ; \left[\dots \right. \\ \left. \dots ; \left\{ \int_0^{h-\xi} e^{\lambda_k(h-\xi-u)} g(u) du - \int_0^{\xi-h} e^{\lambda_k(\xi-h-u)} g(u) du \right\} \right] \rangle\rangle$$

Il nous faut donc montrer que si $g \in \mathcal{D}$, la différence entre les deux expressions ci-dessus, est nulle.

Pour évaluer cette différence nous sommes amenés à poser :

$$A = \int_0^h g(u) e^{\lambda_k(h-u-\xi)} du - \int_0^\xi g(u) e^{\lambda_k(\xi-h-u)} du - \dots \\ \dots - \int_\xi^h g(u) e^{-\lambda_k(\xi+h-u)} du \\ B = \int_0^{h-\xi} e^{\lambda_k(\xi-h-u)} g(u) du - \int_0^{\xi-h} e^{\lambda_k(\xi-h-u)} g(u) du$$

et à former la différence $A-B = C$.

Cette différence peut être mise sous la forme :

$$C = - \int_h^{h-\xi} e^{\lambda_k(h-\xi-u)} g(u) du + \dots \\ \dots + \int_{\xi}^{\xi-h} e^{\lambda_k(\xi-h-u)} g(u) du - \int_{\xi}^h e^{-\lambda_k(\xi+h-u)} g(u) du$$

Posons respectivement dans la première intégrale : $h - \xi - u = -v$

dans la seconde intégrale : $\xi - h - u = -v$

dans la troisième intégrale : $\xi + h - u = v$

L'expression C s'écrit alors :

$$C = \int_0^{\xi} e^{-\lambda_k v} g(h - \xi + v) dv - \int_0^h e^{-\lambda_k v} g(\xi - h + v) dv \\ - \int_{\xi}^h e^{-\lambda_k v} g(\xi + h - v) dv \\ = \int_0^{\xi} e^{-\lambda_k v} \left[g(h - \xi + v) + g(\xi + h - v) \right] dv - \int_0^h e^{-\lambda_k v} \left[g(\xi - h + v) + g(\xi + h - v) \right] dv$$

La différence qu'on veut évaluer s'écrit donc ;

$$(20) \frac{1}{A'(\lambda_k)} \ll T_1(\xi) \times T_2(h) ; \left[\dots \right. \\ \left. \dots \left[\int_0^{\xi} e^{-\lambda_k v} \left[g(h - \xi + v) + g(\xi + h - v) \right] dv - \int_0^h e^{-\lambda_k v} \left[g(\xi - h + v) + g(\xi + h - v) \right] dv \right] \gg \right.$$

g étant dans $\mathcal{P}$ on a :

$$\begin{cases} (T_1^{\vee} * g) + (T_1 * g^{\vee}) = 0 \\ (T_2^{\vee} * g) + (T_2 * g^{\vee}) = 0 \end{cases}$$

ce qui peut encore s'exprimer en disant que les fonctions :

$$g_1 = T_1^{\vee} * g = \langle T_1(\xi) ; g(\xi+x) \rangle$$

$$g_2 = T_2^{\vee} * g = \langle T_2(h) ; g(h+x) \rangle$$

sont impaires.

Or, en permutant le signe $\int$ et un produit scalaire, la formule (20) se met sous la forme :

$$(21) \quad \frac{1}{A'(\lambda_k)} \langle T_1(\xi) ; \int_0^\xi e^{-\lambda_k v} \left[g_2(v-\xi) + g_2(\xi-v) \right] dv \rangle$$

$$- \frac{1}{A'(\lambda_k)} \langle T_2(h) ; \int_0^h e^{-\lambda_k v} \left[g_1(v-h) + g_1(h-v) \right] dv \rangle$$

ce qui est nul puisque g_1 et g_2 sont des fonctions impaires

C.Q.F.D

-:-:-:-:-:-:-:-

- BIBLIOGRAPHIE -

- J. DELSARTE : {1} Les fonctions moyenne périodiques
Journal de Math. pures et appliquées
Ser.9, T.14 pp. 403-453 (1935)
- L. SCHWARTZ : {1} Fonctions moyenne périodiques
Annals of Math.
T. 48 pp. 857-929 (1947)
- {2} Théorie des distributions
Hermann éditeur - Paris
Tome I : 1950 - Tome II : 1951

Vu et approuvé.

NANCY, le 12/9/57

Le DOYEN :

E. URION

Vu et permis d'imprimer

NANCY, le 14/9/57

Le Recteur,
Président du Conseil de l'Université

G. MAYER

